Hajdú-Bihar megyei középiskolások matematikaversenye, 2019/2020
– 11. évfolyam, megoldókulcs –

---

1. feladat

A számsokaság elemszáma páros, amúgy ugyanis az átlag miatt az elemek összege nem lenne egész szám.

2 pont

Ha a minimum legalább 14, akkor a rendezett számsokaság két középső eleme előtt levő elemek mindegyike legalább 14, a medián szerint a két középső elem átlaga 15, így pedig az utánuk következő elemek mindegyike legalább 15. Ezáltal az összes elem átlaga $> 14{,}5$ lenne.

5 pont

Tehát a minimum legfeljebb 13.

1 pont

1 lehet a minimum: például az $1{,}15{,}15{,}27$ számsokaság megfelelő.

2 pont

13 lehet a minimum: például a $13{,}15{,}15{,}15$ számsokaság megfelelő.

2 pont

Összesen: 12 pont

Megjegyzés

A közbülső *5+1 pont*ból *1 pont*ot ér annak a gyengébb észrevételnek a megállapítása, hogy az átlag alapján a minimum legfeljebb 14.

2. feladat

Legyenek a számjegyek $a < b < c < d < e < f$.

1. eset: Ha $a \geq 1$, akkor a legnagyobb és legkisebb belőlük képezhető hatjegyű szám rendre $\overline{fedcba}$ és $\overline{abcdef}$. Ezek összege

$$100001a + 10010b + 1100c + 1100d + 10010e + 100001f = 968878.$$

Ez nem lehetséges, mert a bal oldal osztható 11-gyel, miközben a jobb oldal nem.

3 pont

2. eset: Ha $a = 0$, akkor a legnagyobb és legkisebb belőlük képezhető hatjegyű szám rendre $\overline{fedcb0}$ és $\overline{b0cdef}$. Ezek összege

$$100010b + 1100c + 1100d + 10010e + 100001f = 968878.$$

Az utolsó számjegyek összehasonlításával $f = 8$.

2 pont

Behelyettesítés és 10-zel való osztás után

$$10001b + 110c + 110d + 1001e = 16887.$$

Látható, hogy $b = 1$ ($b \geq 2$ esetén túl nagy a bal oldal, másfelől $b > 0$).

2 pont

Behelyettesítés után

$$110c + 110d + 1001e = 6886.$$

Az utolsó számjegyek összehasonlításával $e = 6$.

2 pont

Behelyettesítés és 110-zel való osztás után $c + d = 8$. Mivel $1 < c < d < 6$, ezért $c = 3$, $d = 5$.

2 pont

A kapott értékek megfelelnek a nagyságrendi előírásoknak, tehát a számjegyek 0,1,3,5,6,8.

1 pont

Összesen: 12 pont

Megjegyzés

Mindkét esetben működnek a másik esetnél látotthoz hasonló gondolatmenetek (akárcsak a 2. eset egyes lépéseinél más lépésben használt megfontolások), például a 2. esetben vizsgálhatunk 11-gyel vett osztási maradékot.

Az utolsó *1 pont* ellenőrzéssel is kiváltható.

3. feladat

A megoldások során a hosszúságok centiméterben értendők.

1. megoldás

Legyen a feladatbeli $ABCD$ trapézban AB a 17, DC a 7 hosszúságú alap. Jelölje a keresett hosszúságú szakasz végpontjait az AD és BC száron rendre E és F, a D pontból az alapokra állított merőleges AB és EF szakaszokkal való metszéspontját pedig rendre G és H.

Legyen a trapéz magasságának hossza m, az EH szakasz hossza x. A húrtrapéz szimmetriája miatt az AG szakasz hossza 5. Mivel a $DEH\triangle$ és a $DAG\triangle$ hasonlók, ezért

$$\frac{DH}{DG} = \frac{EH}{AG} \Longrightarrow \frac{DH}{m} = \frac{x}{5}$$

3 pont

A húrtrapéz szimmetriája miatt az EF szakasz hossza $2x + 7$. A feltétel szerint az $ABCD$ trapéz területe kétszerese az $EFCD$ trapéz területének, azaz

$$\frac{7 + 17}{2} \cdot m = 2 \cdot \frac{7 + 2x + 7}{2} \cdot DH.$$

3 pont

Innen a hasonlóságból kapott aránypár felhasználásával $x^2 + 7x - 30 = 0$ adódik.

3 pont

Ennek a másodfokú egyenletnek a megoldásai 3 és -10, de hosszúságról van szó, ezért $x = 3$. Tehát az EF szakasz hossza $2x + 7 = 13$ centiméter.

3 pont

Összesen: 12 pont

2. megoldás

Legyen a feladatbeli $ABCD$ trapézban AB a 17, DC a 7 hosszúságú alap. Jelölje a keresett hosszúságú szakasz végpontjait az AD és BC száron rendre E és F, a két szár egyenesének metszéspontját pedig G.

Az $EFCD$ trapéz területe $T_{GEF\triangle} - T_{GDC\triangle}$, az $ABFE$ trapéz területe $T_{GAB\triangle} - T_{GEF\triangle}$.

2 pont

Ezek egyenlőségéből

$$\begin{aligned} 2 \cdot T_{GEF\triangle} &= T_{GAB\triangle} + T_{GDC\triangle}, \\ 2 \cdot \frac{T_{GEF\triangle}}{T_{GDC\triangle}} &= \frac{T_{GAB\triangle}}{T_{GDC\triangle}} + 1. \end{aligned}$$

2 pont

Mivel a $GEF\triangle$ és a $GAB\triangle$ is hasonló a $GDC\triangle$-höz, ezért

$$\frac{T_{GEF\triangle}}{T_{GDC\triangle}} = \frac{EF^2}{DC^2} = \frac{EF^2}{49} \text{ és } \frac{T_{GAB\triangle}}{T_{GDC\triangle}} = \frac{AB^2}{DC^2} = \frac{289}{49}.$$

5 pont

Ezek behelyettesítésével

$$\frac{2 \cdot EF^2}{49} = \frac{289}{49} + 1,$$

amiből $EF = 13$, azaz a keresett szakasz 13 cm hosszú.

3 pont

Összesen: 12 pont

Megjegyzés

A 2. megoldásban a trapézról nem használtuk ki, hogy húrtrapéz.

4. feladat

A tanulókból összesen $\binom{90}{2} = 4005$ pár képezhető.

2 pont

Egy tanulókból képzett párt nevezzünk *rossz*nak, ha nem választhatók ki a feladat elvárásainak megfelelően.

*1 pont**

Tekintsünk egy feladatot. Ezt legfeljebb 40-en nem oldották meg helyesen.

1 pont

Ezért erre a feladatra való tekintettel a rossz párok száma legfeljebb $\binom{40}{2} = 780$.

3 pont

Mivel 5 feladat van, ezért a rossz párok száma összesen legfeljebb $5 \cdot 780 = 3900$.

3 pont

Mivel az összes párok száma nagyobb a rossz párok számánál, ezért biztosan van nem rossz pár (sőt legalább 105 nem rossz pár van).

2 pont

Összesen: 12 pont

*A pontszám a rossz esetek összeszámolásának gondolatáért jár.

5. feladat

1. megoldás

Legyen a polinom $f(x) = ax^2 + bx + c$.

A feltétel szerint $p \mid f(1) = a + b + c$, $p \mid f(2) = 4a + 2b + c$ és $p \mid f(3) = 9a + 3b + c$.

2 pont

Ebből következik, hogy $p \mid f(2) - f(1) = 3a + b$ és $p \mid f(3) - f(2) = 5a + b$.

2 pont

Így $p \mid (f(3) - f(2)) - (f(2) - f(1)) = 2a$, amiből adódik, hogy $p \mid a$.

2 pont

Ekkor $p \mid 3a + b$ alapján $p \mid b$, majd $p \mid a + b + c$ alapján $p \mid c$.

2 pont

$p = 2$ esetén nem igaz az állítás, erre példa az $x^2 + x$ polinom.

2 pont

Mivel $x^2 + x = x(x + 1)$, ezért minden pozitív egész szám behelyettesítése esetén két egymást követő egész szám szorzatát, azaz egy páros számot ad.

2 pont

Összesen: 12 pont

2. megoldás

Legyen a polinom $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Mivel $p \mid f(p) = ap^2 + bp + c$, így $p \mid c$.

2 pont

Hasonlóan $p \mid f(1) = a+b+c$ és $p \mid f(p-1) = a(p-1)^2+b(p-1)+c = ap^2-2ap+bp+a-b+c$, utóbbi alapján $p \mid a - b + c$.

2 pont

Ezeket kivonva egymásból $p \mid 2b$ adódik, amiből $p \mid b$.

3 pont

Végül $p \mid a + b + c$ alapján $p \mid a$.

1 pont

$p = 2$ esetén nem igaz az állítás, erre példa az $x^2 + x$ polinom.

2 pont

Ha x helyére páros, illetve páratlan számot helyettesítünk, akkor rendre két páros, illetve két páratlan szám összegeként páros számot kapunk.

2 pont

Összesen: 12 pont

Megjegyzés

A feladat felsőbb matematikai háttere: Ha a polinomot modulo p tekintjük, akkor a feladat feltétele szerint a $\mathbb{Z}_p$ véges testnek mind a p darab eleme gyöke. Ezért modulo p a polinom vagy azonosan 0, vagy legalább p-edfokú. Utóbbi $p \geq 3$ esetén nem lehetséges, hiszen a polinom eredetileg másodfokú volt.

$p = 2$ esetén sok más ellenpélda is adható: Az $ax^2 + bx + c$ polinom pontosan akkor ellenpélda, ha a,b páratlan és c páros, ugyanis modulo 2 tekintve így kapjuk meg az egyetlen olyan nem azonosan 0, legfeljebb másodfokú polinomot, aminek $\mathbb{Z}_2$ mindkét eleme gyöke.